

Една модификация на линейната задача за разкрояване на материали

Мария Токушева

A Modification of the Linear Task of Cutting up Materials

Maria Tokusheva

Abstract

A modification of the linear task of cutting out materials in today's highly competitive and dynamic environment, corporate management efforts are focused on optimizing business operations. For companies that are trying to make the most of their machine capacity and fill the work shift of employees, it is appropriate to take over orders. The presented economical and mathematical model aims at optimal loading of production capacities and optimization of activities related to work shift planning.

Keywords: linear task, optimization, production

JEL Code: C610

Въведение

В съвременните пазарни условия, в които функционират стопанските субекти, планирането на дейността на предприятието изисква наред с традиционните управленски подходи, да се използват и такива, които се базират на икономико-математическото моделиране, защото по този начин може детайлно да се отрази сложната структура на протичащите икономически процеси. Основополагащо за успеха на производственото предприятие е преобразуването на изходните суровини в готова продукция, основано на принципите и критериите за оптималност, залегнали в количественото моделиране на стопанските процеси.

Една от възможностите за оптимизиране производствената дейност на предприятието е свързана с планиране на производствените мощности чрез определяне на икономически най-ефективния вариант за натоварване на работната смяна и изпълнението на отделните производствени процеси в нея. За постигане на тази цел биха могли да се използват методите на икономико-математическото моделиране и по-конкретно може да се адаптира линейната задача за разкрояване на материали¹. В настоящата разработка е предложена една модификация на линейната задача за разкрояване на материали, с оглед на това тя да способства за определяне на оптималния вариант за планиране на продължителността на работната смяна и изпълнението на отделните производствени процеси в нея.

Целта на настоящата разработка е адаптирането на линейната задача за разкрояване на материали към спецификата на дейността на предприятие за преработка на черупкови плодове, с оглед оптимизиране на работното време при работата на ишлеме.

1. Теоретична постановка на линейната задача за разкрояване на материали

Задачата за разкрояване на материали е ориентирана към случаите, при които се налага предварителна производствена обработка на материалите и суровините, които се използват в производството.

В практиката много често материалите, които трябва да бъдат разкроявани, имат стандартна форма и определени размери. По форма те са главно три вида: линейни

¹ Вж. например: Канторович, Л. В., В. А. Залгаллер, Рациональны раскрой промышленных материалов. Новосибирск: Наука, 1971. Атанасов, Б., Т. Милкова, Количествени методи в логистиката. Варна: Наука и икономика, 2011, с. 276-287.

материали (метални пръти, кангали, дъски, тръби и др.), листови материали (дървесни плоскости, метални листи, тъкани, кожа, стъкло и т.н.), материали във формата на рула (стоманени или медни рула, вестникарска хартия и др.). От изходните материали чрез разкрояване трябва да се получат необходимите за изпълнението на производствената програма детайли (заготовки) в определени количества или в дадено съотношение. От единица материал трябва да се нарежат няколко заготовки, които в най-общия случай са различни по форма и размери. В процеса на разкрояването на материали неизбежно се получава отпадък. Това се дължи главно на обстоятелството, че липсва съответствие между формата и размерите на материалите и тези на необходимите детайли.

Отпадъците от изходните материали, които се получават при разкрояването, не могат да бъдат използвани в производството (или се използват непълноценно), което безспорно оказват влияние върху себестойността на произвежданата продукция. Един от начините за реализиране на икономии от материални ресурси и следователно за повишаване ефективността на производството е намаляване до минимум на отпадъците от материали. Това може да се постигне чрез оптимизиране разкрояването на материали.

Същността на оптималното разкрояване се състои в намирането и реализацията на такава стратегия за нарязване на материалите, при която се получават необходимите количества заготовки за изпълнение на производствената програма, а получаваният отпадък да бъде възможно най-малък.

За построяването на икономико-математически модели на задачите за оптимално разкрояване предварително се съставят възможните варианти, като се изчислява отпадъкът от материал и броят на получените елементи. Намирането на всички възможни начини на разкрояване на практика е една нелека самостоятелна комбинаторна задача, затова при решаване на практически задачи за разкрояване обикновено се използват само определен брой от възможни комбинации, предварително определени като подходящи според определен критерий. Съобразно конкретната реална практическа задача за оптимално разкрояване на материалите трябва да се отчитат различни условия, които следва да бъдат отразени в съответните математически модели.

При построяване на икономико-математическите модели на задачите за разкрояване, в зависимост от съответните условия, се прилагат различни критерии за оптималност: минимизиране величината на отпадъка от материал; минимизиране на общия разход от материал; максимизиране на комплектите от детайли, които се получават от определено количество материал. Първият от предложените критерии е най-често прилаган и за това се приема за основен. Останалите два водят до почти същите икономически резултати, но в определени случаи тяхното прилагане е по-удобно при построяването и разрешаването на предложените математически модели. Ще изложим няколко характерни случаи на задачи за оптимално разкрояване на материали.

Предприятие разполага с достатъчно количество материал с еднакви размери. За потребностите на производството трябва да се нарежат различни по размер заготовки в точно определени количества. Предварително са установени начините (вариантите), по които може да се нареже единица изходен материал. Определени са количествата заготовка от различните видове и е известна величината на отпадъка от единица изходен материал при различните варианти на разкрояване.

Трябва да се намери оптимална стратегия на разкрояване, която да осигурява необходимите по вид и количество заготовки, а величината на общия отпадък да бъде минимална. Тази стратегия определя количеството единици изходен материал, които трябва да бъдат нарязани по всеки от установените варианти, така че да бъдат изпълнени наложените изисквания.

За съставянето на математическия модел на формулираната задача, въвеждаме означенията:

i – номер на видовете заготовки ($i = 1 \div m$);
 j – номер на вариантите на разкрояване ($j = 1 \div n$);
 b_j – общо количество на необходимите заготовки от i -ти вид;
 a_{ij} – брой заготовки от i -ти вид, които се получават при разкрояване на единица изходен материал по j -ти вариант;
 c_j – размер на отпадъка, получен от разкрояването на единица изходен материал по j -ти вариант;
 x_j – брой на единиците изходен материал, които следва да се разкроят по j -ти вариант.

Трябва да се намерят такива стойности на неизвестните x_j , които да минимизират функцията

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

при условия

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j \quad (i = 1 \div m), \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1 \div n). \quad (1.3)$$

Целевата функция (1.1) задава величината на общия отпадък и съгласно съдържанието на формулираната задача трябва да се търси нейния минимум. Лявата част на (1.2) представлява количеството заготовки от i -ти вид, които се получават по всичките n варианта на разкрояване, а дясната част – планираното количество заготовки от i -ти вид. Условието (1.3) представляват система от m линейни уравнения, на всяко от които отговаря един вид от заготовките. Тези условия осигуряват получаването на необходимите количества заготовки от всички видове.

Представеният математически модел (1.1 – 1.3) за оптимално разкрояване на материали с еднакви размери и неограничени количества е задача на линейното оптимиране.

В математическия модел (1.1) – (1.3) в изискванията (1.3) за неотрицателност на променливите x_j следва да се постави условие и за целочисленост на решенията. Тъй като в практиката задачата за оптимално разкрояване се поставя за голям обем стандартни материали и закръгляването на получени евентуално дробни решения няма да се отрази съществено върху сумарния размер на отпадъка, то изискване за целочисленост може да не се налага. С това се избягват затрудненията, свързани с прилагането на методите на дискретното оптимиране.

За критерий за оптималност в разглеждания математически модел може да се приеме минимизирането на общото количество на разкрояваните материали, като се осигури получаването на необходимите заготовки за изпълнение на производствената програма. Следователно, трябва да се намери минимумът на функцията

$$Z = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.4)$$

при същите ограничителни условия (1.2 – 1.3).

2. Модификация на линейната задача за разкрояване на материали

Основната дейност на разглежданото предприятие за преработка на черупкови плодове е производството и реализацията на собствена продукция. Освен тези дейности, фирменият мениджмънт възнамерява да предлага услуги по работа на ишлеме, за да може в

максимална степен да използва капацитета на своите машини и да запълни работната смяна на наетия персонал. Поемайки поръчки на ишлеме, ръководството има за цел да намали постоянни разходи на единица произвеждана продукция, разпределяйки ги върху по-голям обем обработвани суровини, а така също и да увеличи своята печалба, чрез получаване на допълнителни приходи за предоставяните услуги. Част от обработваните суровини имат сезонен характер, което означава, че през активния им сезон обработваното количество ще нараства. Поради това, освен оптималното натоварване на производствените мощности, е необходимо да се оптимизират и дейностите, свързани с планиране на работните смени и броя на сезонно наетите служители.

Ръководството е установило, че едни от най-времетоотнемачите и най-често извършвани услуги на ишлеме са тези, свързани с натрошаването на черупкови плодове. Тези услуги изискват специализирани машини с висока ефективност на работа, тъй като от тях зависи качеството на получената фракция и поради тази причина са търсени от малките производители. Процесът се изразява в натрошаване на зададеното от клиента количество, като същевременно е необходимо да се отчита и задължителното почистване и/или обслужване на машината. Цикълът на изпълнение на поръчката зависи от обема на обработваната партия.

За целите на конструирането на икономико-математическия модел ще разглеждаме времетраенето на една работна смяна с определена продължителност (в часове) като линейен материал от тип пръти, която трябва да бъде разпределена (разкроена) на отделни елементи, т.е. на отделни часови интервали с продължителност, зависеща от приетите за изпълнение поръчки за затрошаване на черупкови плодове. Например, ако приемем, че работната смяна е 8 часа, един от възможните варианти за нейното „разкрояване“ е да се изпълнят последователно две производствени операции с продължителност 5 часа и 3 часа. В този случай няма да се наблюдава загуба на време или т. нар. в модела на линейната задача за разкрояване на материали „отпадък“. При работна смяна от 9 часа обаче и последователно изпълнение на тези две операции ще се получи „отпадък“ от един час.

Като изходни материали за разкрояване се разглеждат работните дни, които са с определена продължителност на работната смяна и при разкрояването им трябва да се получат необходимите за изпълнението на зададените поръчки часови интервали за работа на трошачната машина в определени количества. Всички възможни варианти за разпределяне на работната смяна на часови подинтервали за изпълнение на конкретни дейности се определят предварително. За всеки вариант на разкрояване на работната смяна се определя загубата на работно време в часове. При конкретното приложение на линейния модел за разкрояване на материали ще се има предвид, че трябва да се получат определени количества от всеки вид заготовки (отделните часови подинтервали за извършване на всяка конкретна производствена операция) като елементите, подлежащи на разкрояване (работната смяна), имат еднаква продължителност. Количеството материали, подлежащо на разкрояване (работните дни), е неограничено, но се цели определяне на такъв вариант за изпълнение на дейностите, че да се осъществи целия производствен процес за възможно най-малък брой работни дни, т.е. в целевата функция на икономико-математическия модел ще се цели минимизиране на общия разход на материали за разкрояване. С оглед извършването на следоптимален анализ на решението се изчислява и отпадъкът при разкрояването или загубата на работни часове в бездействие на трошачната машина.

На база предварителни преговори с потенциални клиенти е установено, че поръчките, които могат да бъдат получени за натрошаване на черупкови плодове, са с различни обеми, но могат да се разпределят на три групи, а именно поръчки, които се изпълняват за 8 часа, поръчки, които се изпълняват за 5 часа и поръчки, които се изпълняват за 3 часа. Предвид това при прилагане на икономико-математическия модел, отделните елементи или заготовки ще бъдат с продължителност 8, 5 и 3 часа. Аprobацията на модела ще бъде направена при

положение, че в предприятието са получени поръчки в следните количества: 3 поръчки, които се изпълняват за 8 часа; 6 поръчки, които се изпълняват за 5 часа; 6 поръчки, които се изпълняват за 3 часа.

Приемаме, че предприятието разполага с достатъчно работни дни (материали за разкрояване), но трябва да се определи оптимален вариант за изпълнение на поръчките, ако се има предвид, че всяка от тях е с еднакъв приоритет. За целите на осъществяване на анализ на възможните начини за осъществяване на производствената дейност и определяне на най-добрият ще бъдат разгледани пет възможности за продължителност на работната смяна, а именно от 8, 9, 10, 11 и 12 часа.

При конструиране на икономико-математическия модел на формулираната задача използваме следните означения:

i – номер на видовете заготовки с конкретна продължителност от 8, 5 и 3 часа, където ($i = 1, 2, 3$);

h_i – продължителност на i -та поръчка, в разглеждания случай $h_1 = 8$ часа, $h_2 = 5$ часа и $h_3 = 3$ часа;

j – номер на вариантите на разкрояване ($j = 1 \div n$). Броят на тези варианти ще е различен в зависимост от избраната продължителност на работната смяна от 8 до 12 часа;

b_i – общо количество на необходимите заготовки от i -ти вид, т.е. $b_1 = 3$ (трябва да се изпълнят три осемчасови поръчки), $b_2 = 6$ (трябва да се изпълнят шест петчасови поръчки), $b_3 = 6$ (трябва да се изпълнят шест тричасови поръчки);

a_{ij} – брой заготовки от i -ти вид (дейности с продължителност h_i), които се получават при разкрояване на единица изходен материал (една работна смяна) по j -ти вариант. Тези коефициенти зависят от продължителността на работна смяна и предварително определените допустими варианти за разкрояване;

c_j – размер на отпадъка (загубеното работно време), получен от разкрояването на единица изходен материал (една работна смяна) по j -ти вариант. Тези коефициенти също зависят от продължителността на работна смяна и предварително определените допустими варианти за разкрояване;

x_j – брой на единиците изходен материал (работни дни), които следва да се разкроят по j -ти вариант.

Както споменахме, като критерий за оптималност в разглеждания математически модел е избрано минимизирането на общото количество на работните дни, като се осигурява получаването на необходимите заготовки за изпълнение на производствената програма. Следователно, трябва да се намери минимумът на функцията

$$Z = \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.1)$$

при условия

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1 \div n), \quad (2.3)$$

$$x_j \geq 0 \text{ – цели числа.} \quad (2.4)$$

Целевата функция задава общия брой работни дни, които ще са необходими за изпълнение на всички поръчки. Първата група ограничителни условия гарантира точното изпълнение на всички приети поръчки със съответна продължителност от 8, 5 и 3 часа.

В икономико-математическия модел, освен задължителното изискване за неотрицателност на променливите x_j , е поставено условие и за целочисленост на решенията, което се налага от действителното значение на тези променливи, а именно брой работни дни.

Представената адаптация на модела за разкрояване на материали за определяне на оптимален вариант за планиране на дейностите при осъществяване на работата на ишлеме по същество е задача на линейното оптимизиране и може да се реши както посредством аналитични методи, така и с помощта на софтуерни продукти. Предложеният икономико-математически модел е въведен в средата на MS Excel, а оптималното му решение е определено за всеки от петте варианта на продължителност на работната смяна от 8 до 12 часа. Това е извършено с помощта на инструмента за решаване на оптимизационни задачи Solver. Решението е представено в таблица 1

Таблица 1. Оптимално решение на линейния модел за разкрояване на материали за всеки от петте варианта на продължителност на работната смяна от 8 до 12 часа

Продължителност на работната смяна	Минимално време за изпълнение на поръчките	Оптимален вариант за изпълнение на поръчките (брой дни и вариант на разкрояване, който трябва да се прилага)	Загуба на работно време
8 часа	9 дни	3 дни: 1 осемчасова заявка 6 дни: 1 петчасова заявка и 1 тричасова заявка	0 часа
9 часа	9 дни	3 дни: 1 осемчасова заявка 6 дни: 1 петчасова заявка и 1 тричасова заявка	9 часа
10 часа	8 дни	3 дни: 1 осемчасова заявка 3 дни: 2 петчасови заявки 2 дни: 3 тричасова заявки	7 часа
11 часа	7 дни	2 дни: 1 осемчасова заявка и 1 тричасова заявка 1 ден: 1 осемчасова заявка 2 дни: 2 петчасови заявки 2 дни: 1 петчасова заявка и 2 тричасова заявки	5 часа
12 часа	7 дни	2 дни: 1 осемчасова заявка и 1 тричасова заявка 1 ден: 1 осемчасова заявка 3 дни: 2 петчасови заявки 1 ден: 4 тричасови заявки	12 часа

Според данните, изложени в таблица 1, при така зададения обем на работа, се налага да бъде направен избор между следните алтернативи – осем часов работен ден и единадесет часов работен ден. За този избор може да се открият следните по-важни причини, а именно:

- Минималното време за изпълнение на поръчките при работна смяна от по 8 часа и 9 часа е едно и също, а именно – 9 дни. Елиминирането на деветчасовата работна смяна като опция се налага поради факта, че тя се характеризира с 9 часа загуба на работно време в рамките на 9 дни, а осемчасовата смяна с липса на такава. Същата съпоставка е направена и между единадесетчасовата и дванадесетчасовата продължителност на работната смяна, тъй като и в двата случая за обработка на партидата са необходими 7 дни, но при тази от 11 часа е налице по-малка загуба на време, а именно 5 часа.

- Десетчасовата работна смяна не се включва като възможна алтернатива, тъй като по-кратките срокове за изпълнение на поръчката не се компенсират от загубата на работно време и допълните разходи за възнаграждение на работниците за извършване на извънреден труд.

По наше мнение, ако предприятието няма поставени крайни срокове за изпълнение на поръчката, изборът на осемчасова смяна на работа е по-целесъобразен. Избирайки осемчасовата работна смяна се постигат най-ниски производствени разходи, а от там и по-висока печалба. Освен това за разлика от единадесетчасовата работна смяна, при тази от 8 часа е налице по-малко раздробяване на процесите, което от своя страна води до по-малко на брой прекъсвания в работата на машините, промени в настройките и почистване, което така или иначе се извършва в края на работния ден.

Въпреки, че единадесетчасовата работна смяна предполага най-бързо изпълнение на поръчката, с най-малко загуба на работни часове, при нея разходите за извънреден труд ще надхвърлят ползите и икономическият ефект ще бъде отрицателен. Тя би била обоснован избор само при съкратени срокове за изпълнение на поръчката.

Заклучение

В съвременната икономическа реалност стопанските субекти са изправени пред необходимостта от непрекъснато усъвършенстване на осъществяваната от тях дейност. Това налага търсенето на различни възможности за оптимизиране на процесите съобразно спецификата на дейността на съответните предприятия. Посредством способите на икономико-математическото моделиране и отчитайки особеностите на дейността на изследваното предприятие за преработка на черупкови плодове беше модифицирана линейната задача за разкрояване на материали, с цел оптимизиране на работното време при работа на ишлеме, което от своя страна ще повиши ефективността на цялостната дейност на предприятието. Предложеният модел може да бъде адаптиран и перманентно прилаган в процеса на функциониране на предприятието, с оглед на това непрекъснато да се определя оптимален вариант за планиране на работното време, като се има предвид количеството на текущо получаваните заявки за натрошаване на черупкови плодове и времето за изпълнение на всяка заявка.

Използвана литература

1. Атанасов, Б., Т. Милкова, Количествени методи в логистиката. Варна: Наука и икономика, 2011
2. Канторович, Л. В., В. А. Залгаллер, Рациональны раскрой промышленных материалов. Новосибирск: Наука, 1971.

За контакти

Мария Токушева, докторант
Икономически университет – Варна
m.tokusheva@yahoo.com